

FEUILLE DE CALCULS DE LA RECHERCHE

CALCUL DE L'INERTIE :

Pour un plateau considéré comme le tronc d'un cône retourné à base circulaire plein de masse $M = 1,087$ kg et de rayon de base $R = 0,16$ m, le moment d'inertie exprime la répartition de la masse autour de l'axe de rotation.

Par définition, $I = \int r^2 dm$

En coordonnées polaires, pour une épaisseur négligeable et une masse surfacique $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$:

$$I_{cm} = \int_0^R r^2 (\sigma 2\pi r dr) = 2\sigma\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \times \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

Application numérique : $I_{cm} = 0.5 \times 1.087 \times 0.16^2 \approx 0.0139 \text{ kgm}^2$

INERTIE RÉELLE AU PIVOT :

Le plateau ne tourne pas autour de son centre, mais autour de l'axe reliant les deux points de contact sur le plat. De plus, la forme conique dirigée vers le bas suggère un point de contact ponctuel, et provoque un décalage entre le centre des masses et le point de contact de 1 cm

Puisque l'axe de rotation est décalé d'une distance $d = 0.01$ m par rapport au centre de masse, on utilise le théorème de Huygens (ou Steiner) :

$$I_{pivot} = I_{cm} + Md^2$$

Avec une surélévation $d \approx 0.01 \text{ m} \Rightarrow I_p = 0.0139 + (1.087 \times 0.01^2) \approx 0.0140 \text{ kgm}^2$

Nous pourrions plus tard confirmer expérimentalement cette distance d à l'aide du couple issu du pointage des vidéos.

ANISOTROPIE DU CÔNE :

L'anisotropie signifie que la force qui ramène le plateau vers le centre change selon l'axe choisi. La force de rappel dépend de la pente locale,

donc de la courbure du tronc de cône. Pour une ellipse de demi-axes a (longueur) et b (largeur), le rayon de courbure est :

$$R(\theta) = \frac{(a^2 \sin(\theta) + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{a \times b}$$

Sur le petit axe, ($\theta = 0$): $R_{min} = \frac{b^2}{a} \approx 10,5cm$; ici, la courbe est très serrée, la pente du cône monte vite, la force de rappel en est plus importante.

Sur le grand axe, ($\theta = \frac{\pi}{2}$): $R_{max} = \frac{a^2}{b} \approx 26.5cm$; ici la courbure plus douce impacte la force de rappel et entraîne une fréquence plus basse.

Le plateau est donc sujet à une raideur différente selon le cas car la géométrie du verre impose une variation du puits de potentiel gravitationnel selon l'orientation.

DYNAMIQUE ET COUPLE :

Dans notre système, on peut appliquer le théorème du moment cinétique :

$$\Sigma \Gamma_{ext} = I \cdot \alpha$$

Au point de contact, les forces normales exercées par l'ovale passent par l'axe de rotation (le pivot). Comme leur bras de levier est nul, leur couple est nul :

$$\Gamma = F \times 0 = 0$$

Pour un balancement de longue durée, on néglige initialement les frottements pour identifier le mouvement.

Le couple s'applique au centre de masse, décalé de la distance d du pivot. Le couple est donc :

$$\Gamma = -Mg d \sin(\theta)$$

C'est donc le seul couple capable de mettre le système en mouvement, ce qui nous permet d'écrire : $I\alpha = -Mg d \sin(\theta)$

Pour nous permettre de valider expérimentalement, et par le calcul, de valider la distance d provoquée par la pente du tronc du cône, nous pouvons, à l'aide du pointage de la vidéo :

$$d = \left| \frac{I_p \times a}{M \times g \times \sin(\theta)} \right|$$

Il nous suffit d'extraire les données d'accélération angulaire, et les angles associés.

Il faut donc trouver : $\frac{0.0140^2 \cdot \alpha}{1.087 \cdot 9.81 \cdot \sin(\theta)} = 0.01m$

En appliquant ces calculs sur le tableau de valeurs provenant du pointage de la vidéo du système, nous obtenons la valeur suivante :

QUALITÉ DU CONTACT ET ÉTUDE DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE :

Le facteur Q quantifie la capacité du système à stocker l'énergie par rapport à ce qu'il perd à chaque cycle, selon la formule suivante :

$$Q = 2\pi \frac{E_c}{\Delta E_{perdue/cycle}} = \pi \times f \times \tau$$

En mettant en œuvre cette relation dans matlab, nous finissons par obtenir les valeurs suivantes :

fréquence moyenne f : 26.68 Hz

Constante de temps Tau : 62.55 s

Facteur de Qualité Q : 5243.36

De plus, une chute lente de la vitesse (mesurée par le pointage de la vidéo) ou une raie très fine sur le spectre de Fourier indiquait déjà un Q élevé, ce qui a été confirmé.

Calcul de l'énergie : Utilisons

$$E_k = \frac{1}{2} I_{pivot} \omega^2$$

La différence ΔE_k entre le début et la fin, divisée par le nombre de cycles, donne la perte par contact tel que :

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} I_{pivot} (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

En utilisant cette formule sur le tableau de valeurs extrait du pointage de la vidéo, nous obtenons une valeur aberrante de 4 J/s. Après réflexion, l'erreur provient du bruit de mesure : étant faite à la main, l'analyse du mouvement est imparfaite, ce qui provoque sur le tableau de valeurs une variation d'énergie aberrante elle aussi (exemple : il y a souvent des sauts de plusieurs joules entre deux images pourtant espacées d'un soixantième de seconde).

En faisant la moyenne, le bruit ne s'annule pas car la résultante ne prend finalement en compte qu'une perte colossale (pour notre système) d'énergie.

Nous prendrons donc pour ce résultat le fruit de l'analyse sonore effectuée sur MATLAB, puis nous tenterons une nouvelle méthode :

$$P_{perte} = \frac{\pi \cdot f \cdot E_{max}}{Q} = \frac{\pi \times 26.68 \times 4.2}{5243} \approx 0.067W$$

Pour réessayer de calculer l'énergie perdue par oscillation à partir des données de pointage de la vidéo sans être victimes du bruit de mesure, nous allons cette fois-ci prendre en compte que l'énergie d'un oscillateur décroît selon la loi $E(t) = E_0 e^{\frac{-2k}{\tau}}$

La puissance dissipée est la dérivée de cette énergie. Pour obtenir la perte moyenne, on utilise donc la formule sur le fichier Excel :

$$P_{perte} = \frac{2 \cdot E_{tot}}{\tau}$$

En appliquant ce calcul, on obtient 0.0363W, ce qui est bien plus précis et juste : en effet le calcul effectué sur MATLAB pour trouver 0.067W était un ajustement global, donc beaucoup moins précis que lorsque nous avons utilisé la loi de dissipation en prenant en compte le même tau dans chaque cas.

TRAÎTEMENT DU SIGNAL

Pour cette étude, la Transformée de Fourier Discrète (TFD) est l'outil central pour extraire la fréquence précise de l'audio. En effet, les transformations de Fourier classiques ne localisent pas les événements temporels. Comme

la fréquence du cône change avec le temps (anharmonicité et amortissement), une TFD globale serait brouillée...

En principe, on calcule le spectre $X(f)$ à partir d'échantillons $x(nT_e)$ puis on calcule le carré du module

$$|X(f, k)|^2$$

pour obtenir une indication de l'énergie présente autour d'une fréquence à un instant donné dans le spectrogramme.

Comme le cône ralentit et change de fréquence, on utilise la Transformée de Fourier à court terme en ne conservant que N échantillons successifs pour localiser l'analyse dans le temps.

Pour traiter les données rapidement, l'algorithme FFT est privilégié, surtout si que la fenêtre de données N est une puissance de 2 (2^k)

Ainsi, on calcule la TFD sur une fenêtre glissante de N échantillons

$$X(f_k) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(nT_e) e^{\frac{-2i\pi nk}{N}}$$

Avec $f_e = \frac{1}{T_e} = 44100 \text{ Hz}$ la fréquence d'échantillonnage audio

ANHARMONICITÉ ET APPROXIMATION DE BORDA :

L'isochronisme des petites oscillations stipule que la période T est indépendante de l'amplitude. Mais cela n'est vrai que si $\sin(\theta) \approx \theta$.

La formule exacte de la période fait appel à une intégrale elliptique complexe. L'approximation de Borda est le développement limité au deuxième ordre :

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right)$$

Nous allons l'utiliser car elle permet de quantifier l'écart à l'idéalité de manière efficace dans notre cas, et nous l'utiliserons pour vérifier la précision du matériel utilisé, et ses effets : si notre fréquence en fonction du temps augmente alors que l'amplitude baisse, c'est que le puits de

potentiel n'est pas une parabole parfaite et révélera les potentielles imperfections sur le tronc de cône.

L'analyse sur MATLAB de l'anharmonicité par la méthode STFT révèle une pente positive de 0,2708 Hz/u.a.. Ce résultat identifie sans ambiguïté un puits de potentiel durcissant. Contrairement à un oscillateur harmonique idéal, la fréquence d'oscillation décroît avec l'amortissement de l'amplitude. Ce phénomène confirme la géométrie réelle du support : la force de rappel augmente plus que linéairement avec l'écart à l'équilibre, caractéristique d'une géométrie conique. Ce résultat permet de quantifier précisément l'imperfection du support : la fréquence chute au fur et à mesure que l'amplitude décroît, prouvant que le cône rencontre une force de rappel de moins en moins intense lorsque son mouvement se rapproche du centre d'inertie du tronc de cône. Cet écart à l'isochronisme est la signature des imperfections géométriques du support ovale.